## Faktische Sperrklausel

Verfasser des Vermerks: Simon Rock
Version: 26.02.2015

$U_s$ = untere Grenze Sitzanspruch

$O_s$ = obere Grenze Sitzanspruch

n = Anzahl an Parteien

m = Anzahl an Mandaten

Formel für faktische Sperrklausel bei **Hare-Niemeyer**:

$U_s = \frac{1}{n}$

Je mehr Parteien antreten, desto geringer ist also die untere Grenze. Für n=10 würde also im Extremfall ein Sitzanspruch von 0,1 reichen, um ein Mandat zu erringen. Bei einer Ratsgröße von m = 90 würde demnach im Extremfall

$\frac{0,1}{90} * 100 \cong 0,11\%$ der gültigen Stimmen reichen, um ein Mandat zugeteilt zu bekommen, während durchschnittlich $\frac{1}{90} * 100 \cong 1,1\%$ der Stimmen für ein Mandat notwendig sind.

Mathematisch lässt sich dies durch partielles Differenzieren beweisen:

$$\frac{\partial U_s}{\partial n} = -\frac{1}{n^2} < 0$$

In NRW wird allerdings nicht Hare-Niemeyer, sondern das Verfahren nach Saint-Laguë:

Hier ergibt sich die untere Grenze durch folgende Formel[1]:

$$U_s = \frac{0,5m}{m + 0,5n - 1}$$

Bei m = 90 und n = 10 ergibt sich die untere Grenze also zu:

$$U_s = \frac{0,5 * 90}{90 + 0,5 * 10 - 1} \cong 0,4788\ Sitzen$$

Dies entspricht einem Stimmanteil von $\frac{0,4788}{90} * 100 \cong 0,53\%$ der Stimmen.

[1] Klaus Kopfermann, Mathematische Aspekte der Wahlverfahren, Mannheim 1991, S. 131.

Interessant ist, wie sich die untere Grenze verändert, wenn man die Anzahl der zur Wahl antretenden Parteien n erhöht.

Hierfür wird $U_s$ nach n mit Hilfe der Quotientenregel partiell differenziert:

$$\frac{\partial U_s}{\partial n} = -\frac{0{,}25m}{(m + 0{,}5n - 1)^2} < 0 \quad \forall \ m > 1$$

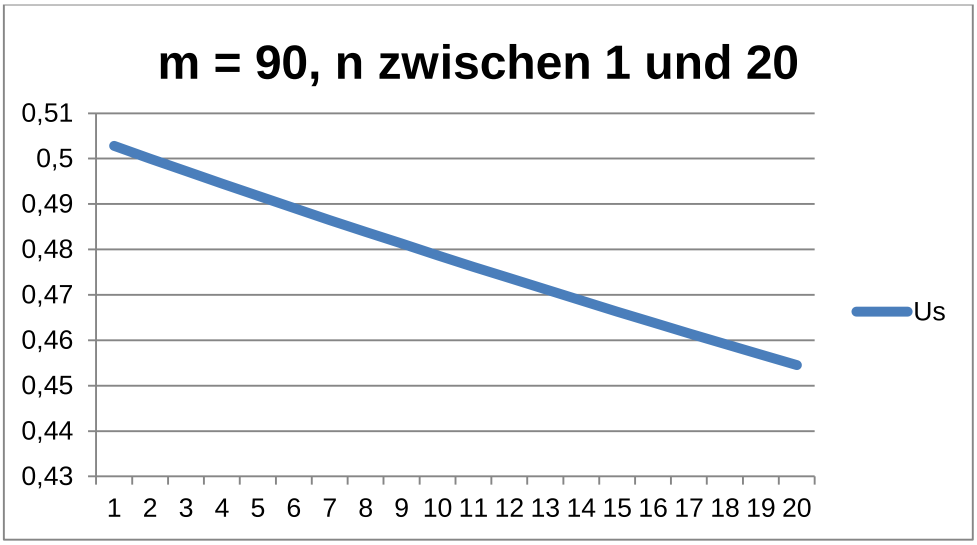
Die Ableitung ergibt eindeutig, dass $U_s$ streng monoton fallend in n ist, oder anders ausgedrückt ergibt die Ableitung, dass die untere Grenze sinkt, wenn die Anzahl der Parteien ansteigt.

Mithilfe der zweiten Ableitung lässt sich zeigen, dass die Kurve streng konvex verläuft:

$$\frac{\partial^2 U_s}{\partial n^2} = \frac{m}{(m + 0{,}5n - 1)^3} > 0 \quad \forall \, m > 1$$

Allerdings gilt für $n \ \to \ \infty$ bei konstantem m, dass $U_s \to 0$ konvergiert.

Dies verdeutlicht auch die grafische Veranschaulichung, bei welcher m = 90 angenommen wird.




Interessant ist bei Sainte-Laguë auch die obere Grenze, ab der man mit Sicherheit ein Mandat zugeteilt bekommt.

Diese bestimmt sich als

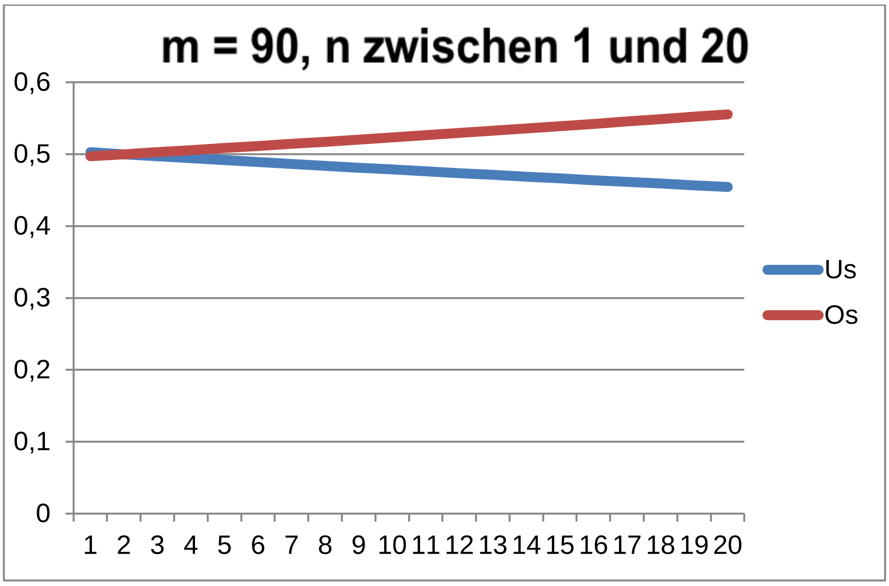
$$O_s = \frac{0{,}5m}{m - 0{,}5n + 1}$$

Für n=10 und m=90 ergibt sich somit ein Wert von: $\frac{0{,}5*90}{90-0{,}5*10+1} \cong 0{,}52326$

Mit anderen Worten: Bei 90 Mandaten, 10 konkurrierenden Parteien und einem Sitzanspruch von 0,52326 bekommt man in jedem Fall einen ganzen Sitz zugeteilt. Eine

Eigenschaft von Sainte-Laguë ist es ja gerade, dass man bei einem Restsitzanspruch von über 0,5 mit höherer Wahrscheinlichkeit einen Restsitz bekommt. Deshalb heißt das Verfahren ja auch „Divisorverfahren mit Standardrundung". Praktisch bedeutet das aber, dass in einem stärker zersplitterten Gremium die Wahrscheinlichkeit steigt, dass Kleinstparteien mit einem idealen Sitzanspruch von deutlich unter einem ganzen Sitz überproportional repräsentiert sind.

Für m=90 lässt sich dies auch folgendermaßen grafisch veranschaulichen:




Mit anderen Worten:

Treten mehr Parteien zur Wahl an, so ist es möglich, dass der Sitzanspruch, der mindestens notwendig ist, um tatsächlich einen Sitz zugewiesen zu bekommen, immer weiter sinkt, und zwar potenziell bis auf Werte kaum über 0.
Es ist also bei sehr vielen Parteien, die zur Wahl antreten, prinzipiell denkbar, dass nur sehr wenige Stimmen ausreichen, um einen Sitz zu bekommen.